国立大学入試対策問題　図形と式

$\boxed{1}$　a は定数で、$a>1$ とする。座標平面において、円 $C:x^2+y^2=1$、直線 $l:x=a$ とする。l 上の点 P を通り円 C に接する2本の接線の接点をそれぞれ A, B とするとき、直線 AB は、点 P によらず、ある定点を通ることを示し、その定点の座標を求めよ。

$\boxed{2}$　座標平面上において、放物線 $y=x^2$ 上に異なる２点 $P,\ Q$ をとり、線分 PQ の中点を M とし、M の座標を $(a,\ b)$ とする。

(1)　$a=1,\ b=3$ のとき、線分 PQ の長さ PQ を求めよ。

(2)　$PQ=4$ のとき、b を a の式で表せ。

(3)　$PQ=4$ を満たしながら $P,\ Q$ を動かすとき、b の最小値を求めよ。

$\boxed{3}$　O を原点とする xy 平面において、直線 $y=1$ の $|x|\geqq 1$ を満たす部分を C とする。

(1)　C 上に点 $A(t,\ 1)$ をとるとき、線分 OA の垂直二等分線の方程式を求めよ。

(2)　点 A が C 全体を動くとき、線分OA の垂直二等分線が通過する範囲を求め、それを図示せよ。

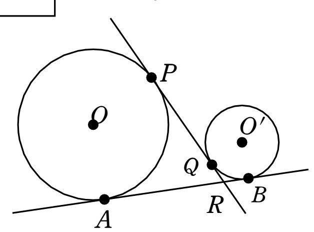
$\boxed{4}$　連立不等式 $\begin{cases} x^2+y^2\leqq 25 \\ (y-2x-10)(y+x+5)\leqq 0 \end{cases}$ の表す領域を D とする。

(1)　領域 D を求めよ。

(2)　点 $(x,\ y)$ がこの領域 D を動くとき、$x+2y$ の最大値 M と最小値 m を求めよ。また、M,m を与える D の点を求めよ。

(3)　a を実数とする。点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとき、$ax+y$ が点 $(-3, 4)$ で最大値をとるような a の値を求めよ。

$\boxed{5}$　右の図において、直線 AB は円 O, O' にそれぞれ点 $A,\ B$ で接していて、直線 PQ は円 O, O' にそれぞれ $P,\ Q$ で接している。直線 AB と直線 PQ の交点を R とする。円 O, O' の半径をそれぞれ $r,\ r'$ とする。ただし、$r>r'$ である。中心 O, O' 間の距離が7で、$AB=5,\ PQ=3$ であるとき、$r,\ r'$ の大きさは $r=\boxed{}$, $r'=\boxed{}$ であり、線分 AR の長さは $AR=\boxed{}$ である。



$\boxed{6}$　a を実数とする。直線 $ax+y+1=0$ を l_1、直線 $x+ay+1=0$ を l_2、直線 $x+y+z=0$ を l_3 とおく。

(1)　$l_1,\ l_2,\ l_3$ のどの2つも異なり、かつ平行にならないための、a についての条件を求めよ。

(2)　a が(1)の条件を満たす場合に、l_1 と l_2 の交点を A、l_2 と l_3 の交点を B、l_3 と l_1 の交点を C とする。
$A,\ B,\ C$ が三角形の3頂点となるための、a についての条件を求めよ。

(3)　a が(2)の条件を満たす場合、三角形 ABC が正三角形となるような a の値を求めよ。

$\boxed{7}$　$r>3$ とする。座標平面上の3点 $O(0,\ 0),\ A(4,\ 0),\ B(0,\ 3)$ に対して次の問いに答えよ。

(1)　$PO:PA=3:1$ である点 P の軌跡の方程式を求めよ。

(2)　$PO:PB=3:r$ である点 P の軌跡の方程式を求めよ。

(3)　$PO:PA:PB=3:1:r$ となる点 P が存在するような r の範囲を求めよ。

$\boxed{8}$　xy 平面における2つの放物線 $C:y=(x-a)^2+b$, $D:y=-x^2$ を考える。

(1)　C と D が異なる2点で交わり、その2交点の x 座標の差が 1 となるように実数 $a,\ b$ が動くとき、C の頂点 $(a,\ b)$ の軌跡を図示せよ。である点 P の軌跡の方程式を求めよ。

(2)　実数 $a,\ b$ が(1)の条件を満たしながら動くとき、C と D の2交点を結ぶ直線が通過する範囲を求め、図示せよ。