

① a は $2^{2\log_4 48 - \log_2 \frac{3}{4}}$ である。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。このとき、

- (1) a の値を整数で表すと である。
- (2) a^{30} は 桁の数である。
- (3) b は、 b^{50} を小数で表すと小数第25位に初めて0でない数字が現れる正の数である。このとき $\left(\frac{b}{a}\right)^4$ を小数で表すと、小数第 位に初めて0でない数字が現れる。

② $A = \{2^n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$, $B = \{5^n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ とする。
 $A \cup B$ の要素のうち、小さいものから数えて100番目の要素を c とするとき、 A の要素で c 以下のものは 個ある。また、 $\log_{10} c$ の整数部分は である。ただし、 $\log_{10} 2$ の近似値0.3010 を用いてよい。

③ x の方程式 $9^x - a \cdot 3^{x+1} + a + 1 = 0$ について

- (1) $a = -2$ のとき、実数解は $x =$ である。
- (2) 異なる2つの正の実数解をもつとき、 a の値の範囲は $< a <$ である。

④ a を定数、 x を実数とし、 $y = 9^x + \frac{1}{9^x} - 4a\left(3^x + \frac{1}{3^x}\right)$ とする。

$$t = 3^x + \frac{1}{3^x} \text{ とおく。}$$

- (1) t のとりうる範囲を求めよ。
- (2) y を t の式で表せ。
- (3) y の最小値とそのときの x の値を、 a を用いてそれぞれ表せ。

⑤ 次の問いに答えよ。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$,
 $\log_{10} 7 = 0.8451$, $\log_{10} 11 = 1.0414$ とする。

- (1) 3^{20} の1の位の数字を求めよ。
- (2) n を自然数とし、 3^n が21桁で1の位の数字が7となるとき、 n の値を求めよ。
- (3) 7^{70} の最高位の数字を求めよ。
- (4) 7^{70} の最高位の次の位の数字を求めよ。

⑥ x の関数 $f(x)$, $g(x)$ を $f(x) = 2^x + 2^{-x}$, $g(x) = 2^x - 2^{-x}$ によって定める。

- (1) 等式 $\log_{\frac{1}{2}}\{f(x) - 2\} + \log_2\left\{f(x-1) - \frac{3}{2}\right\} + 2\log_4\{f(x) + g(x) - 2\} = 1$ を満たす実数 x をすべて求めよ。
- (2) $f(1)f(-1) + g(1)g(-1)$ の値を求めよ。
- (3) 実数 α, β に対して、 $f(\alpha + \beta)$ と $g(\alpha + \beta)$ をそれぞれ $f(\alpha)$, $g(\alpha)$, $f(\beta)$, $g(\beta)$ を用いて 表せ。

⑦ $A = \{2^n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$, $B = \{5^n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ とする。
 $A \cup B$ の要素のうち、小さいものから数えて100番目の要素を c とするとき、 A の要素で c 以下のものは 個ある。また、 $\log_{10} c$ の整数部分は である。ただし、 $\log_{10} 2$ の近似値0.3010 を用いてよい。