$\boxed{1}$　a, b を$0 \leqq a \leqq 1$, $0 \leqq b < 1$ を満たす定数とする。数列$\{a_n\}$を次の条件によって定める。　$a_1 = a$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n{}^2 + b)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$

$c = 1 - \sqrt{1-b}$ とおく。

(1)　$0 \leqq a_n \leqq 1$ が成り立つことを示せ。

(2)　$a_{n+1} - c = \dfrac{1}{2}(a_n + c)(a_n - c)$ が成り立つことを示せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = c$ が成り立つことを示せ。

$\boxed{2}$　$b = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $c = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ とする。数列$\{a_n\}$の一般項が $a_n = b^n + c^n$ で与えられるとき、次の問に答えよ。

(1)　a_1, a_2 を求めよ。　　(2)　$a_{n+2} - a_{n+1}$ をa_nを用いて表せ。

(3)　(2)で得られた結果を用いてa_5を求めよ。

(4)　自然数nに対して$\sin(2\pi a_n)$, $\cos(2\pi a_n)$ を求めよ。

(5)　極限 $S = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(2\pi c^n)}{b^n}$ を求めよ。　　(6)　極限 $S = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(2\pi b^n)}{c^n}$ を求めよ。

$\boxed{3}$　$a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_{n+2} = \dfrac{1}{2}(a_{n+1} + a_n)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$で定められた数列$\{a_n\}$について、次の問に答えよ。

(1)　$b_n = a_{n+1} - a_n$ とおく。数列$\{b_n\}$の一般項b_nを求めよ。

(2)　数列$\{a_n\}$の一般項a_nを求めよ。

(3)　極限値$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$を求めよ。

$\boxed{4}$　数列$\{a_n\}$を$a_1 = 5$, $a_{n+1} = \dfrac{4a_n - 9}{a_n - 2}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$　で定める。また数列$\{b_n\}$を

$b_n = \dfrac{a_1 + 2a_2 + \cdots\cdots + na_n}{1 + 2 + \cdots\cdots + n}$　$(n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ と定める。

(1)　数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(2)　すべてのnに対して、不等式 $b_n \leqq 3 + \dfrac{4}{n+1}$ が成り立つことを示せ。

(3)　極限値$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$を求めよ。

$\boxed{5}$　xy平面において、x, yがともに整数であるとき、点(x, y)を格子点と呼ぶ。mを正の整数とするとき、放物線$y = x^2 - 2mx + m^2$ とx軸およびy軸によってかっ込まれた図形をDとする。

(1)　Dの周上の格子点の数L_mをmを用いて表せ。

(2)　Dの周上および内部の格子点の数T_mをmを用いて表せ。

(3)　Dの面積をS_mとする。$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{T_m}{S_m}$ を求めよ。

$\boxed{6}$　数列$\{a_n\}$は次を満たす。

$a_1 = 3$, $a_{n+1} = \dfrac{4 - a_n}{a_n - 1}$　$(n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$

(1)　$a_n = b_n + 2$ とおく。b_{n+1}をb_nで表せ。

(2)　$b_n = \dfrac{1}{c_n}$ とおく。数列$\{c_n\}$の一般項を求めよ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。