1　数直線上の点Qは、はじめは原点$x=0$にあり、さいころを投げるたびに以下のルールに従って移動する。Qが$x=a$にあるとき、

●出た目が1ならば$x=a$にとどまる。

●出た目が2，3ならば$x=a+1$へ動く。

●出た目が4，5，6ならば$x=0$に戻る。（$a=0$ならば動かない。）

(1)　整数$a \geqq 0$に対して、さいころを3回投げたとき、Qが$x=a$にある確率を求　　めよ。

(2)　さいころをn回投げたとき、Qが$x=0$にある確率を求めよ。

(3)　さいころをn回投げたとき、Qが$x=1$にある確率を求めよ。

2　原点を出発点とし、x軸上を動く点Pがある。白球6個と黒球4個が入っている袋から球を1個ずつ取り出す。取り出した球が白球であれば点Pは正の方向に1だけ進み、黒球であれば点Pは負の方向に1だけ進むこととする。ただし、取り出した球は袋に戻さない。このとき、次の問いに答えよ。

(1)　球を2回取り出すとき、点Pが原点にある確率を求めよ。

(2)　球を8回取り出すとき、点Pの座標が2である確率を求めよ。

(3)　球を6回取り出すとき、2回目かつ6回目で点Pが原点にある確率を求めよ。

(4)　球を6回取り出すとき、6回目で点Pが初めて4となる確率を求めよ。

3　座標平面上x座標とy座標がいずれも整数である点を格子点という。格子点上を次の規則に従って動く点Pを考える。

(a)　最初に、点Pは原点Oにある。

(b)　ある時刻で点Pが格子点$(m,\ n)$にあるとき、その1秒後の点Pの位置は、隣接する格子点$(m+1,\ n)$, $(m,\ n+1)$, $(m-1,\ n)$, $(m,\ n-1)$のいずれかであり、また、これらの点に移動する確率は、それぞれ$\dfrac{1}{4}$である。

(1)　点Pが、最初から6秒後に直線$y=x$上にある確率を求めよ。

(2)　点Pが、最初から6秒後に原点Oにある確率を求めよ。

4　正の実数$a,\ b,\ c$が$a+5b+7c=12$を満たすとする。

(1)　実数$p,\ q,\ r,\ x,\ y,\ z$に対して、

$(px+qy+rz)^2+(py-qx)^2+(qz-ry)^2+(rx-pz)^2$を因数分解せよ。

(2)　実数$p,\ q,\ r,\ x,\ y,\ z$に対して、不等式

$$(p^2+q^2+r^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (px+qy+rz)^2$$

が成り立つことを示せ。また、等号が成り立つのはどのようなときか。

(3)　$\sqrt{a}+\sqrt{5b}+\sqrt{7c}$の最大値を求めよ。

5　さいころを3回投げて出た目の数を順に$p_1,\ p_2,\ p_3$とし、xの2次方程式

$2p_1x^2+p_2x+2p_3=0$ ……$(*)$を考える。

(1)　方程式$(*)$が実数解を持つ確率を求めよ。

(2)　方程式$(*)$が実数でない2つの複素数解$\alpha,\ \beta$をもち、かつ$\alpha\beta=1$が成り立つ確率を求めよ。

(3)　方程式$(*)$が実数でない2つの複素数解$\alpha,\ \beta$をもち、かつ$\alpha\beta<1$が成り立つ確率を求めよ。

6　座標平面上の点$(1,\ 0)$に物体Aがある。サイコロを振り、1から4の目が出たら原点から距離1だけ遠ざけ、5または6の目が出たときには原点のまわりに15度時計方向と逆回りに回転させる。物体Aがy軸に達するまでこれを続ける。

(1)　物体Aが点$(0,\ n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$に達する確率$P_n$を求めよ。

(2)　P_nを最大にするnを求めよ。

7　ある電器店が、A社、B社、C社から同じ製品を仕入れた。A社、B社、C社から仕入れした比率は、4:3:2 であり、製品が不良品である比率はそれぞれ3%、4%、5%であるという。いま、よく混ぜられた3社の製品の中から任意に1個抜き取って調べたところ不良品であった。これがA社である確率を求めよ。

8　始めに赤玉2個と白玉2個が入った袋がある。その袋に対して以下の試行を繰り返す。

(i)　まず同時に2個の玉を取り出す

(ii)　その2個の玉が同色であればそのまま袋に戻し、色違いであれば赤玉2個を袋に入れる。

(iii)　最後に白玉1個を袋に追加してかき混ぜ、1回の試行を終える。

n回目の試行が終わった時点での袋の中の赤玉の数をX_nとする。

(1)　$X_1=3$となる確率を求めよ。

(2)　$X_2=3$となる確率を求めよ。

(3)　$X_2=3$であったとき、$X_1=3$である条件付き確率を求めよ。

$\boxed{9}$ 1辺の長さが1mの正四面体の辺上に4匹のアリがいる。時刻0分において、アリは別々の頂点にいる。各自然数tに対して、時刻$(t-1)$分からt分までの1分間に、アリは頂点から他の頂点へ分速1mで進むか、同じ頂点でとどまるかのどちらかである。そしてアリが他のいずれかの頂点へ進む確率も、同じ頂点にとどまる確率も、等しく$\dfrac{1}{4}$である。以下、nを自然数とする。

(1) 時刻n分のとき、4匹のアリが同じ頂点に居合わせる確率を求めよ。

(2) 時刻0分からn分までの間に、どのアリも他のアリと頂点で出会わない確率を求めよ。

(3) 時刻0分からn分までの間に、どのアリも他のアリと頂点でも辺の中点でも出会わない確率を求めよ。

$\boxed{10}$ 当たる確率が常に$\dfrac{1}{4}$のくじを繰り返し引く。当たりが含まれる確率を0.99以上にするには、少なくとも何回くじを引かなければならないか答えよ。必要であれば、$\log_{10}2=0.3010,\ \log_{10}3=0.4771$を用いてもよい。

$\boxed{11}$ 袋の中に1, 2, 3のいずれかの番号の書かれた玉が合わせて10個入っている。この中から2個の玉を同時に取り出すとき、取り出した玉の番号の積が3の倍数である確率は$\dfrac{1}{5}$である。また、3個の玉を同時に取り出すとき、取り出した玉の番号の和が6になる確率は$\dfrac{19}{60}$である。このとき、番号が1の玉は$\boxed{}$個、2の玉は$\boxed{}$個、3の玉は$\boxed{}$個ある。また、1個の玉を取り出すとき、取り出した玉の番号が偶数である確率は$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$である。

$\boxed{12}$ コインをn回投げて複素数$z_1,\ z_2,\ \cdots\cdots,\ z_n$を次のように定める。

(i) 1回目に表が出れば$z_1=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$とし、裏が出れば$z_1=1$とする。

(ii) $k=2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n$のとき、$k$回目に表が出れば$z_k=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}z_{k-1}$とし、裏が出れば$z_k=\overline{z_{k-1}}$とする。ただし、$\overline{z_{k-1}}$は$z_{k-1}$の共役な複素数である。このとき、$z_n=1$となる確率を求めよ。

$\boxed{13}$ 箱の中にn枚のカードが入っている。ただし、$n\geqq 3$とする。そのうち1枚は金色、1枚は銀色、残りの$(n-2)$枚は白色である。この箱からカードを1枚取り出し、その色が金色なら50点、銀なら10点、白なら0点と記録し、カードを箱に戻す。この操作を繰り返し、記録した点の合計がk回目に初めてちょうど100点になる確率$P(k)$を求めよ。

$\boxed{14}$ 点Pは、数直線上の点1から出発し、さいころの出る目が1, 2, 3, 4ならば$+1$だけ、5, 6なら-1だけ動く。この試行を繰り返し、点Pが点0または点5に到達したときに試行は終了するものとする。点Pが点5に到達して終わる確率を求めよ。