国立大学入試対策問題　微分積分

$\boxed{1}$ 曲線$y=\log x\,(x>0)$ をCとする。$a>1$ とし、点$(1,\ 0)$ における曲線Cの接線をL_1、点$A(a,\ \log a)$ における曲線Cの接線をL_a とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 不定積分 $\int(\log x)^2dx$ を求めよ。

(2) 直線L_a の方程式および直線L_1 と直線L_a の交点のx座標を求めよ。

(3) 2直線L_1, L_a と曲線Cで囲まれた図形の面積を$S(a)$ とするとき、極限値$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{S(a)}{a}$ を求めよ。

ただし、$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{(\log a)^k}{a}=0\,(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を用いて良い。

(4) 2直線L_1, L_a と曲線Cで囲まれた図形をx軸の周りに1回転してできる立体の体積を$V(a)$とするとき、極限値$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{V(a)}{a\log a}$ を求めよ。ただし、$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{(\log a)^k}{a}=0\,(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$を用いて良い。

$\boxed{2}$ 定数a, c について、関数$f(x)=c(x-a)^2$ は、$\int_0^1 f(x)dx=1$ を満たすとする。このとき、次の問いに答えなさい。

(1) c の値をa を用いて表しなさい。

(2) $I=\int_0^1 xf(x)dx$ の値をa を用いて表しなさい。

(3) $0<a<1$ のとき、I の値を最小にするa の値を求めなさい。

$\boxed{3}$ a を実数とし、関数$f(x)=4x^2+a\cos 2x$ を考える。以下の設問(1)〜(4)に答えよ。

(1) $x=0$ で、曲線$y=f(x)$ が上に凸になるようなa の値を求めよ。

(2) $x=\dfrac{\pi}{8}$ で、$f(x)$ が極値を持つようなa の値を求めよ。また、a が求めた値のとき、$x=0$ で、曲線$y=f(x)$ が上に凸か下に凸か答えよ。

(3) (2)で求めたa の値を使って増減表を作成し、曲線$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。
（ただし、変曲点を求める必要はない。）

(4) (2)で求めたa の値を使い、曲線$y=f(x)$ と直線$y=f\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ に囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$\boxed{4}$ (1) 次の定積分を求めよ。

$$f(x)=\int_0^x e^{t-x}\sin(t+x)dt$$

(2) (1)で求めたx の関数$f(x)$ に対し、極限値$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ を求めよ。

$\boxed{5}$ $f(x)$ をx の関数とし、すべての実数x, y に対して等式$f(x+y)=f(x)+f(y)$ が成り立っているものとする。

(1) $f(0)=0$ であることを示せ。また、すべての実数x に対して$f(-x)=-f(x)$ が成り立　っていることを示せ。

(2) すべての 0 でない整数 n に対して、$f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{f(1)}{n}$ であることを示せ。

(3) $f(x)$ の$x=0$ における微分係数$f'(0)$ が定まるとき、$f'(0)=f(1)$ となることを示せ。

$\boxed{6}$ a, b を実数とする。x の4次関数$f(x)=x^4-ax^2+bx$ が極大値を持つための必要十分条件をa とb に関する不等式で表せ。

$\boxed{7}$ 自然数n に対して関数$f_n(x)$, $F_n(x)$を次のように定義する。

$$f_n(x)=x^ne^{-x},\ F_n(x)=\int_0^x f_n(t)dt$$

(1) $0\leqq x\leqq 1$ のとき $0\leqq f_n(x)\leqq\dfrac{1}{e}$ が成り立つことを示せ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{F_n(1)}{n\,!}=0$ を示せ。

(3) (2)を用いて $e=1+1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n\,!}+\cdots\cdots$ を示せ。

$\boxed{8}$ a を正の実数とする。関数$f(x)=e^{a(x+1)}-ax$ とする。

(1) $f(x)$ の最小値を求めよ。

(2) 原点から曲線$y=f(x)$ に引いた接線の方程式を求めよ。

(3) この曲線とy 軸、および(2)で求めた接線によって囲まれた部分の面積$S(a)$ を求めよ。

(4) $S(a)$ の最小値を求めよ。

$\boxed{9}$ 整数係数の多項式$f(x)$ を$(x-a)^2$ で割ったときの余りを、a, $f(a)$, $f'(a)$ を使って表せ。

$\boxed{10}$ a を実数として、2つの2次関数のグラフC_1: $y=2x^2$, C_2: $y=-x^2+2x-a$ は共有点を持たないとする。

(1) a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 点$(t,\ 2t^2)$ におけるC_1 の接線がC_2 と接するとき、a をt の式で表せ。

(3) C_1, C_2 の両方に接する2つの接線が垂直であるとき、a の値を求めよ。

$\boxed{11}$ a を実数として、2つの2次関数のグラフC_1: $y=2x^2$, C_2: $y=-x^2+2x-a$ は共有点を持たないとする。

(1) a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 点$(t,\ 2t^2)$ におけるC_1 の接線がC_2 と接するとき、a をt の式で表せ。

(3) C_1, C_2 の両方に接する2つの接線が垂直であるとき、a の値を求めよ。

$\boxed{12}$　座標空間内の4点$A(1,\ 0,\ 0)$, $B(-1,\ 0\ ,\ 0)$, $C(0,\ 1,\ \sqrt{2})$, $D(0,\ -1,\ \sqrt{2})$ を頂点とする四面体$ABCD$を考える。

(1)　点$P(0,\ 0,\ t)$を通りz軸に垂直な平面と、辺ACが点Qにおいて交わるとする。Qの座標をtで表せ。

(2)　四面体$ABCD$(内部を含む)をz軸のまわりに1回転させてできる立体の体積を求めよ。

$\boxed{13}$　座標平面上を運動する点Pの時刻tにおける座標を$x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$ とするとき、次の問に答えよ。

(1)　時刻tにおける点Pの速度$\vec{v}$およびその大きさ$|\vec{v}|$を求めよ。

(2)　$t=\dfrac{\pi}{2}$ のとき、ベクトル$\vec{v}$がx軸の正の向きとなす角αを求めよ。

(3)　原点をOとするとき、ベクトル$\vec{v}$とベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$のなす角$\theta$は一定であることを示し、$\theta$を求めよ。

$\boxed{14}$　nを自然数とする。

(1)　関数$f(x)=x^{n+1}e^{-x}$ の$x\geqq 0$ における最大値を求めよ。

(2)　極限$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^n e^{-x}$ を求めよ。

(3)　すべての自然数nに対して$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\int_0^x t^n e^{-t}dt=n\,!$ を示せ。

$\boxed{15}$　次のように $0\leqq x\leqq 2$ で定義された関数$f(x)$がある。

$$f(x)=\begin{cases}0 & \left(0\leqq x\leqq \dfrac{1}{2}\right)\\[2ex] 4x^2-1 & \left(\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 2\right)\end{cases}$$

曲線$y=f(x)$をy軸のまわりに1回転してできる形の容器がある。この容器に、からの状態から毎秒πの割合で水を注いでいく。。開始から10秒後において

(1)　水面の底面からの高さhを求めよ。

(2)　水面の上昇する速度を求めよ。

(3)　水面の面積の増加する速度を求めよ。

$\boxed{16}$　xy平面内の図形

$$S=\begin{cases}x+y^2\leqq 2\\ x+y\geqq 0\\ x-y\leqq 2\end{cases}$$

を考える。図形Sを直線$y=-x$のまわりに1回転して得られる立体の体積をVとする。

(1)　Sをxy平面に図示せよ。

(2)　Vを求めよ。

$\boxed{17}$　aを正の定数とし、$f(x)=x^2(x-3a)$ とおく。座標平面上の曲線$y=f(x)$をCとし、曲線C上の点$P(-a,\ f(-a))$における接線をlとする。接線lが点P以外で曲線Cと交わる点をQとする。

(1)　点Qの座標をaを用いて表せ。

(2)　線分PQと曲線Cで囲まれる図形の面積Sをaを用いて表せ。

(3)　曲線C上の点$R(a,\ f(a))$を考える。線分PQ、線分RQおよび曲線Cで囲まれる図形の面積をT_1とする。また、線分RQと曲線Cで囲まれる図形の面積をT_2とする。このとき、$\dfrac{T_1}{T_2}$を求めよ。

$\boxed{18}$　aを正の定数とし、$f(x)=x^2(x-3a)$ とおく。座標平面上の曲線$y=f(x)$をCとし、曲線C上の点$P(-a,\ f(-a))$における接線をlとする。接線lが点P以外で曲線Cと交わる点をQとする。

(1)　点Qの座標をaを用いて表せ。

(2)　線分PQと曲線Cで囲まれる図形の面積Sをaを用いて表せ。

(3)　曲線C上の点$R(a,\ f(a))$を考える。線分PQ、線分RQおよび曲線Cで囲まれる図形の面積をT_1とする。また、線分RQと曲線Cで囲まれる図形の面積をT_2とする。このとき、$\dfrac{T_1}{T_2}$を求めよ。

$\boxed{19}$　関数$f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ について、次の問に答えよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)$ と $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$を求めよ。

(2)　関数$y=f(x)$の増減とグラフの凹凸を調べ、変曲点があれば求めよ。また、そのグラフをかけ。

(3)　aを実数とする。不等式$-\dfrac{1}{2}<f(at)<\dfrac{4}{5}$ を満たすtの範囲が$-2<t<1$ であるとき、aの値を求めよ。

$\boxed{20}$　関数$f(\theta)=\dfrac{1}{2}\sin 2\theta+\sin\theta$ の区間$[x,\ x+\pi]$における最大値を$g(x)$とする。ただし、xは$0\leqq x\leqq 2\pi$ を満たす実数とする。

(1)　$y=f(\theta)$のグラフを$0\leqq\theta\leqq 3\pi$ の範囲でかけただし、グラフの凹凸は調べなくてよい。

(2)　$g(x)$をxを用いて表せ。

(3)　$g(x)$が$x=\pi$ において微分可能であるかどうか理由をつけて答えよ。

$\boxed{21}$ 関数$f(\theta)=\dfrac{1}{2}\sin 2\theta+\sin\theta$ の区間$[x,\ x+\pi]$における最大値を$g(x)$とする。ただし、xは$0\leqq x\leqq 2\pi$ を満たす実数とする。

(1) $y=f(\theta)$ のグラフを$0\leqq\theta\leqq 3\pi$ の範囲でかけ。ただし、グラフの凹凸は調べなくてよい。

(2) $g(x)$ をx を用いて表せ。

(3) $g(x)$ が$x=\pi$ において微分可能であるかどうか理由をつけて答えよ。

$\boxed{22}$ $f(x)=xe^{-x}$ とおく。

(1) 関数$y=f(x)$ の増減、極値、グラフの凹凸、変曲点を調べて、グラフの概形をかけ。ただし、$\lim_{x\to\infty}xe^{-x}=0$ が成り立つことは、証明なしで用いてよい。

(2) 座標平面において、x 軸上の点$(a,\ 0)$ を通り曲線$y=f(x)$ に接する直線が存在しないようなa の値の範囲を求めよ。

$\boxed{23}$ k を2以上の整数とする。また $f(x)=\dfrac{1}{k}\left\{(k-1)x+\dfrac{1}{x^{k-1}}\right\}$ とおく。

(1) $x>0$において、関数$y=f(x)$ の増減と漸近線を調べてグラフの概形をかけ。

(2) 数列$\{x_n\}$ が$x_1>1,\ x_{n+1}=f(x_n)$ ($n=1,\ 2,\ \cdots\cdots$) を満たすとき、$x_n>1$ を示せ。

(3) (2)の数列$\{x_n\}$ に対し、$x_{n+1}-1<\dfrac{k-1}{k}(x_n-1)$ を示せ。また$\lim_{n\to\infty}x_n$ を求めよ。

$\boxed{24}$ 関数 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+12}$ に対し、次の問いに答えよ。

(1) 関数$f(x)$ の極値を求めよ。

(2) $f(x)=f(x+1)$ を満たす実数x を求めよ。

(3) 関数$f(x)$ の$t\leqq x\leqq t+1$ における最小値を$g(t)$ とするとき、$g(t)$ を求めよ。

(4) (3)で求めた$g(t)$ に対して、$\displaystyle\int_0^5 g(t)dt$ の値を求めよ。

$\boxed{25}$ 2つの曲線

$$C_1:\ y=\frac{1}{\sqrt{2}\sin x}\ (0<x<\pi),\ \ C_2:\ y=\sqrt{2}(\sin x-\cos x)\ (0<x<\pi)$$

について、次の問いに答えよ。

(1) 曲線C_1 と曲線C_2 の共有点のx 座標を求めよ。

(2) 曲線C_1 と曲線C_2 とで囲まれた図形をx 軸のまわりに1回転させてできる回転体の体積V がπ^2 であることを示せ。

$\boxed{26}$ (1) 定積分$\displaystyle\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx+\int_1^e(\log y)^2dy$ の値を求めよ。

(2) $f(x)=\tan x$ とする。関数$y=f(x)$ は$-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で逆関数$x=f^{-1}(x)$ をもつ。

定積分$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx+\int_0^1 f^{-1}(y)dy$ および$\displaystyle\int_0^1 f^{-1}(y)dy$ の値を求めよ。

(3) 定積分$\displaystyle\int_0^1 e^{x^2}dx+\int_1^e\sqrt{\log y}\,dy$ の値を求めよ。

$\boxed{27}$ n を2以上の自然数とする。曲線$y=x^ne^{-x}$ 上の点$(t,\ t^ne^{-t})$ における接線とy 軸との交点を$(0,\ f_n(t))$ とする。t が$t>0$ の範囲を動くとき、$f_n(t)$ が極大となるt をa_n とし、$f_n(t)$ が極小となるt をb_n とする。

(1) $f_n(t)$ をt とn を用いて表せ。

(2) $a_n,\ b_n$ をn を用いて表せ。

(3) 極限値$L=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n})$ を求めよ。

$\boxed{28}$ $a,\ b$ を正の実数とする。x が$0<x<1$ の範囲を動くとき、関数$f(x)=\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{1-x}$ の最小値を求めよ。

$\boxed{29}$ $a,\ b,\ c$ を実数とし、関数$f(x)$ を$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ とする。3次方程式 $f(x)=0$ の解の1つが$-1-i$ で、関数$f(x)$ が$x=-\dfrac{2}{3}$ で極大となるとき、$a=\boxed{}$ である。

$\boxed{30}$ $a,\ b,\ c$ を実数とし、関数$f(x)$ を$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ とする。3次方程式 $f(x)=0$ の解の1つが$-1-i$ で、関数$f(x)$ が$x=-\dfrac{2}{3}$ で極大となるとき、$a=\boxed{}$ である。

$\boxed{31}$ 関数$f(x)=x^3-9k^2x,\ g(x)=kx^2-7k^2x$ を考える。ただしk は正の定数とする。

(1) $f(x)=g(x)$ を満たす実数x をすべて求めよ。

(2) 曲線$y=f(x)$ と曲線$y=g(x)$ のある共有点において、両曲線の接線が直交するとき、k の値を求めよ。

(3) k は(2)で求めた値とする。2曲線$y=f(x),\ y=g(x)$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{32}$ 関数$f(x)=(1+x)e^{-x}$について次の問いに答えよ。

(1) $f(x)=0$ を満たすx の値を求めよ。

(2) 曲線$y=f(x)$ について、原点を通るすべての接線の方程式を求めよ。

(3) 曲線$y=f(x)$ について、原点を通る接線のうち、接点のx 座標が最大のものをL とする。曲線$y=f(x)$ と直線L およびx 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

33 aを実数とする。$a=\boxed{\quad}$のとき、$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+x}+ax\right)$は有限な値$\boxed{\quad}$をとる。

34 (1) 定積分$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\cos^2 x}\,dx$ を求めよ。

(2) $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ で定義された関数$f(x)$が$f(x)\cos^2 x=\pi-\dfrac{x}{\log 2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}f(t)dt$ を満たすとき、$f(x)$を求めよ。

35 部分積分法より、$\displaystyle\int e^{-x}\sin x\,dx=\boxed{\quad}+\int e^{-x}\cos x\,dx$,
$\displaystyle\int e^{-x}\cos x\,dx=\boxed{\quad}-\int e^{-x}\sin x\,dx$ が成り立つ。次に、nを自然数とする。
$I_n=\displaystyle\int_0^{n\pi}e^{-x}\sin x$, $J_n=\displaystyle\int_0^{n\pi}e^{-x}\cos x\,dx$ とおくと、I_n-J_n は$1-\left(\boxed{\quad}\right)^n e^{-n\pi}$ と表される。これより、$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2I_n-1)$ とおくと、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\boxed{\quad}$ となる。

36 (1) すべての実数tに対し、$1+t\leqq e^t$ が成り立つことを示せ。

(2) 定積分$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin x}dx$ の値を求めよ。

(3) 次の不等式を示せ。

$$\frac{\pi}{4}-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\leqq\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\sin x}dx\leqq 2-\sqrt{2}$$

37 kを正の数とする。2つの曲線 C_1 : $y=k\cos x$, C_2 : $y=\sin x$ を考える。
C_1 とC_2 は$0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲に交点が2つあり、それらのx座標をそれぞれα, β $(\alpha<\beta)$とする。区間$\alpha\leqq x\leqq\beta$ において、2つの曲線C_1 , C_2 で囲まれた図形をDとし、その面積をSとする。さらにDのうち、$y\geqq 0$ の部分の面積をS_1、$y\leqq 0$ の部分の面積をS_2とする。

(1) $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\cos\beta$. $\sin\beta$ をそれぞれkを用いて表せ。

(2) Sをkを用いて表せ。

(3) $3S_1=S_2$ となるようにkの値を定めよ。

(4) 極限$\displaystyle\lim_{k\to\infty}S_1$ を求めよ。

38 $a>0$ とし、$f(x)=x^3-3a^2x$ とおく。次の2条件を満たす点$(a,\ b)$の動きうる範囲を求め、座標平面上に図示せよ。
条件1：方程式$f(x)=b$ は相異なる3実数解をもつ。
条件2：更に、方程式$f(x)=b$ の解を$\alpha<\beta<\gamma$ とすると、$\beta>1$ である。

39 a, b, pは定数で、$0<a<b$, $0<p<1$ を満たすものとする。$f(x)=x^p$ とおき、定積分

$$I=\int_a^b f''(x)(x-a)b^{1-p}dx$$

(1) $I<0$ であることを示せ。

(2) $A=pa+(1-p)b$, $G=a^p b^{1-p}$ とおく。IをA, Gを用いて表せ。

(3) (2)で定めたA, Gの大小を調べよ。

40 $-3\leqq x\leqq 0$ に対して、$F(x)=\displaystyle\int_x^{x+3}\sqrt{3t^2+t^3}\,dt$ とおく。

(1) $-3<x<0$ に対して、$F'(x)=0$ の解を求めよ。

(2) $F(x)$の最小値を求めよ。

41 $0\leqq x\leqq 1$ に対して$f(x)=\displaystyle\int_0^1\log(|t-x|+1)\,dt$ とおく。このとき関数$y=f(x)$ $(0\leqq x\leqq 1)$の最大値、最小値、およびそのときのxの値を求めよ。