$\boxed{1}$　座標空間において、xy 平面上にある双曲線$x^2-y^2=1$ のうち$x \geqq 1$ を満たす部分をC とする。また、z 軸上の点$A(0,\ 0,\ 1)$ を考える。点P がC 上を動くとき、直線AP と平面$x=d$ との交点の軌跡を求めよ。ただし、d は正の定数とする。

$\boxed{2}$　図に示すように、点O を通り三角形OAB に垂直な直線上に点C があり、$\angle OAC=\dfrac{\pi}{3}$,

$\angle OBC=\dfrac{\pi}{6}$ である。また、辺AB を$t:(1-t)$ に内分する点をP とし、$\angle OPC=\theta$ とする。

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1,\ \cos\angle AOB=\dfrac{1}{3}$ であるとき、以下の設問(1)〜(5)に答えよ。

$\boxed{3}$　図に示すように、点O を通り三角形OAB に垂直な直線上に点C があり、$\angle OAC=\dfrac{\pi}{3}$,

$\angle OBC=\dfrac{\pi}{6}$ である。また、辺AB を$t:(1-t)$ に内分する点をP とし、$\angle OPC=\theta$ とする。

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1,\ \cos\angle AOB=\dfrac{1}{3}$ であるとき、以下の設問(1)〜(5)に答えよ。

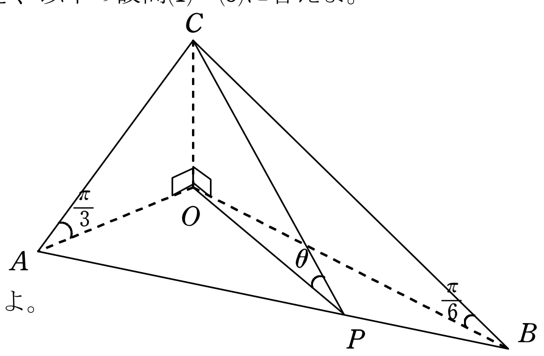
(1)　$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|,\ |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$ の値を求めよ。

(2)　内積$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の値を求めよ。

(3)　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ の値を求めよ。

(4)　$\cos\theta$ をt を用いて表せ。

(5)　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ となるときの t の値を求めよ。



$\boxed{4}$　座標平面の2点$A(2,\ 0,\ 0),\ B(0,\ -1,\ 0)$ および

$$\vec{u}=(-1,\ 2,\ 5),\ \vec{v}=(1,\ 1,\ 1),\ \vec{w}=(-1,\ 3,\ 1)$$

と成分表示される3つのベクトルがある。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と$\vec{u}$ が平行かつ$\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ と$\vec{v}$ が平行となるような点P の座標を求めよ。

(2)　上で求めた点P に対し、$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ と$\vec{w}$ が直交するような点$C(0,\ 0,\ c)$ を求めよ。

(3)　上で求めた点P に対し、Pは3点$A,\ B,\ C$ の定める平面上にあることを示せ。

$\boxed{5}$　原点をO とする座標空間に3つの点$A(3,\ 0,\ 0),\ B(0,\ 2,\ 0),\ C(0,\ 0,\ 1)$ がある。

(1)　O から3つの点$A,\ B,\ C$ を含む平面に垂線を下ろし、この平面と垂線の交点をH とすると、点H の座標は$\left(\dfrac{\square}{\square},\ \dfrac{\square}{\square},\ \dfrac{\square}{\square}\right)$ である。

(2)　四面体$OABC$ に内接する球の半径は$\dfrac{\square}{\square}$ である。

$\boxed{6}$　$\triangle OAB$ の辺$AB,\ OB$ の中点をそれぞれ$C,\ D$ とする。辺OA 上に$OE:EA=1:4$ となる点E をとる。線分OC と線分$BE,\ AD$ との交点をそれぞれ$P,\ Q$ とし、線分AD と線分BE の交点の交点をR とする。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくとき、次の問に答えよ。

(1)　ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ をベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。

(2)　ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ をベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。

(3)　$|\vec{a}|=\sqrt{5}$, $|\vec{b}|=1$, 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$ のとき、$\triangle PQR$ の面積を求めよ。

$\boxed{7}$　$a,\ b,\ c$ を正の定数とし、3点$A(a,\ 0,\ 0),\ B(0,\ b,\ 0),\ C(0,\ 0,\ c)$ の定める平面をα とする。また、原点O とし、平面α に垂直な単位ベクトルを$\vec{n}=(n_1,\ n_2,\ n_3)$ とする。ただし、$n_1>0$ とする。

(1)　$\vec{n}$ を求めよ。

(2)　平面α上に点H があり、直線OH はα に垂直であるとする。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ および$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$ を求めよ。

(3)　$\triangle ABC$ の面積をS 、$\triangle OBC$ の面積をS_1 とする。四面体$OABC$ の体積を考えることにより、

　$S_1=n_1 S$ であることを示せ。

$\boxed{8}$　座標空間内の4点$A(-3,\ 1,\ 1),\ B(6,\ 7,\ -2),\ C(6,\ -4,\ 11),\ C(1,\ 11,\ -9)$ に対して、次の問いに答えよ。

(1)　直線AB と直線CD は1点P で交わることを示し、P の座標を求めよ。

(2)　$\triangle APC$ と$\triangle APD$ の面積比を求めよ。

$\boxed{9}$ xyz 座標内に3点$A(2,\ 0,\ 1)$, $B(0,\ 3,\ -1)$, $C(0,\ 3,\ -3)$ がある。線分BC 上の点を$P(0,\ 3,\ s)$ とおく。線分AP をt:$(1-t)$ に内分する点をQ とする。ただし、t は$0<t<1$ を満たす。点Q を中心とする半径3の球面をK とし、球面K とxy 平面が交わってできる円の面積をS_1 、球面K とyz 平面が交わってできる円の面積をS_2 とおく。

(1) 球面K の方程式を求めよ。　(2) S_1 をs とt の式で表せ。

(3) 点P は線分BC 上で固定し、点Q は線分AP 上を動くものとする。S_1+S_2 が最大値をとるt をs の式で表せ。

(4) (3)において点Q が線分ＡＰ の中点であるときにS_1+S_2 が最大値をとるとする。このときのs の値を求めよ。

$\boxed{10}$ 座標空間の4点$A\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2},\ 0\right)$, $B(0,\ 0,\ 1)$, $C\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -1\right)$, $D\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -1\right)$ に対し、$\vec{p}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{q}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+s\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とおく。ただし、O は原点、s とt は実数とする。

(1) $|\vec{p}|$, $|\vec{q}|$ と内積$\vec{p}\cdot\vec{q}$ をs, t で表せ。

(2) $t=\dfrac{1}{2}$ のとき、ベクトル$\vec{p}$ と$\vec{q}$ のなす角が$\dfrac{3}{4}\pi$ となるようなs の値を求めよ。

(3) s とt が実数を動くとき、$|\vec{p}-\vec{q}|$ の最小値を求めよ。

$\boxed{11}$ 座標空間に球面 S : $x^2+y^2+z^2+4x-6y-8z+16=0$ と点$A(1,\ 0,\ -2)$ がある。点A を通り、$\vec{n}=(1,\ 2,\ -2)$ に垂直な平面をα とする。平面α 上に点$B(5,\ t,\ 2)$があるとき、次の問に答えよ。

(1) 球面S の中心C の座標と半径を求めよ。

(2) 定数t の値を求めよ。

(3) 球面S が平面α と交わってできる円K の半径を求めよ。

(4) 円K の周上を点P を動くとき、$\triangle ABP$ の面積の最大値を求めよ。なお、2点A, B は円K の外部にある。

$\boxed{12}$ $\triangle ABC$ において、３本の中線の交点を重心G、３つの頂点A, B, C を通る中心を外心O とし、$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とする。２つのベクトル$\vec{x}$ と$\vec{y}$ の内積を$\vec{x}\cdot\vec{y}$ と表す。

(1) 頂点A, B, C から、それぞれの大変またgはその延長上に下ろした垂線gは1点で交わることを示せ。この交点を$\triangle ABC$ の垂心と呼び、H とする。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

(4) 重心G　垂心H、外心O の3点が一直線上にあることを示せ。ただし、ベクトル$\vec{x}$ に対して$\vec{x}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ かつ$\vec{x}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ であるならば、$\vec{x}$ は零ベクトルであることを利用してよい。

$\boxed{13}$ $OA=\sqrt{7}$, $OB=\sqrt{5}$, $AB=\sqrt{6}$ の$\triangle OAB$ の外接円の中心をC とする。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ として、次の問いに答えよ。

(1) 内積$\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{c}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}$ を求めよ。

(2) $\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}$ を満たす実数s, t を求めよ。

(3) 点O を座標平面上の原点に取り、点A の座標を$(0,\ \sqrt{7})$ とする。このとき点B, C の座標をそれぞれ求めよ。ただし、点B は第1象限にあるとする。

$\boxed{14}$ 平面上の３つのベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ が$|\vec{a}|=\sqrt{p}$, $|\vec{b}|=\sqrt{q}$, $|\vec{c}|=\sqrt{p+q}$, $\vec{a}\cdot\vec{c}=p$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=q$ を満たしている。ただし、p, q は正の数で$p \fallingdotseq q$ とする。

(1) $\vec{a}$ と$\vec{b}$ は平行でないことを示せ。

(2) $\vec{c}$ を$\vec{a}$, $\vec{b}$, p. q を用いて表せ。

$\boxed{15}$ 正方形$ABCD$ の辺を除く内部に、$PA\perp PB$ を満たす点P がある。ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ を$x\overrightarrow{\mathrm{PA}}+y\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ と表すとき、次の問いに答えよ。

(1) $\alpha=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}$ とするとき、x, y をα を用いて表せ。

(2) 点P が題意の条件を満たしながら動くとき、(1)で求めたx, y の和$x+y$ の最大値を求め、そのときのP がどのような点かを答えよ。

$\boxed{16}$ 座標空間において、xy 平面上の$BD=CD$ である二等辺三角形BCD を、直線BC を回転軸としてz 軸正方向へ$60°$ 回転したとき、頂点D の回転後の点をA とする。もとの二等辺三角形BCD を底面、A を頂点とする四面体$ABCD$ を作る。更に辺AB を$3:1$ に内分する点、辺BC の中点、辺CD を$2:3$ に内分する点を、それぞれL, M, N とし、3点L, M, N を通る平面と直線AD との交点をS とする。また四面体$ABCD$ の体積をV とする。

(1) $\dfrac{AS}{DS}$ を求めよ。

(2) $\cos\angle AMS$ を求めよ。

(3) $BD=1$ のとき、V の最大値とそのときの辺AD の長さをそれぞれ求めよ。